PART3　n 進数

3 (1)　3 進法で表すと 6 桁になるような自然数 N は何個あるか。

(2)　自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ となり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ となる。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

Point Pickup

・n 進法で表したとき，m 桁となる自然数 N は $n^{m-1} \leqq N < n^m$ と表される。

・n_1 進法と n_2 進法の比較は，それぞれ 10 進法で表してから行うとよい。

第 9 講　PART3　確認問題

1　5 進法で表すと 5 桁になるような自然数 N は何個あるか。

[アイウエ] 個

2　自然数 N を 6 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(6)}$ となり，9 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(9)}$ となる。a，b，c の値を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

$a=$ [オ]，$b=$ [カ]，$c=$ [キ]，

$N=$ [クケコ]

PART3　n 進数

3　(1)　3 進法で表すと 6 桁になるような自然数 N は何個あるか。

(2)　自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ となり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ となる。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

(1)　題意より　$3^5 \leqq N < 3^6$

N は自然数であるから　$3^5 \leqq N \leqq 3^6-1$

これを満たす自然数 N の個数は

$$(3^6-1)-3^5+1=3^6-3^5=3^5(3-1)=243\cdot2=486\text{(個)}$$

(2)　$abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　$1 \leqq c \leqq 6$，$0 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$

よって　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$1 \leqq c \leqq 4$

$$N=abc_{(5)}=a\cdot5^2+b\cdot5^1+c\cdot5^0=25a+5b+c$$

$$N=cab_{(7)}=c\cdot7^2+a\cdot7^1+b\cdot7^0=49c+7a+b$$

よって　$25a+5b+c=49c+7a+b$　より　$24c-9a=2b$

すなわち　$3(8c-3a)=2b$ …… ①

2 と 3 は互いに素であるから，b は 3 の倍数

$0 \leqq b \leqq 4$ より，$b=0$，3

$b=0$ のとき　①より $3a=8c$

3 と 8 は互いに素であるから，a は 8 の倍数であるが，$1 \leqq a \leqq 4$ を満たす 8 の倍数は存在せず不適。

$b=3$ のとき　①より　$8c-3a=2$　すなわち　$8c=3a+2$ …… ②

よって，$3a+2$ は 8 の倍数

$1 \leqq a \leqq 4$ より，$5 \leqq 3a+2 \leqq 14$ であるから，$3a+2=8$　よって　$a=2$

このとき②より　$c=1$（$1 \leqq c \leqq 4$ を満たす）

以上より　$a=2$，$b=3$，$c=1$

したがって　$N=25\cdot2+5\cdot3+1=66$

第 9 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイウエ：2500

[解説]

題意より　$5^4 \leqq N < 5^5$ [A]

N は自然数であるから　$5^4 \leqq N \leqq 5^5 - 1$

これを満たす自然数 N の個数は

$$(5^5-1)-5^4+1 = 5^5-5^4 = 5^4(5-1)$$
$$= 25^2 \cdot 4 = 25^2 \cdot 2^2$$
$$= 50^2 = \mathbf{2500}\ (個)$$

[A]　n 進法で表すと m 桁となる自然数 N は,

$1\underbrace{0\cdots0}_{m-1}{}_{(n)}$ 以上, $1\underbrace{0\cdots0}_{m}{}_{(n)}$ 未満

である。すなわち

$n^{m-1} \leqq N < n^m$

2 [正解] オ：5，カ：5，キ：2，クケコ：212

[解説]

$abc_{(6)}$ は 3 桁の 6 進数であるから

$1 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 5,\ 0 \leqq c \leqq 5$

$cab_{(9)}$ は 3 桁の 9 進数であるから

$1 \leqq c \leqq 8,\ 0 \leqq a \leqq 8,\ 0 \leqq b \leqq 8$

よって　$1 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 5,\ 1 \leqq c \leqq 5$

$N = abc_{(6)} = a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \cdot 6^0$ [B]

$= 36a + 6b + c$

$N = cab_{(9)} = c \cdot 9^2 + a \cdot 9^1 + b \cdot 9^0$

$= 81c + 9a + b$

[B]　n_1 進法と n_2 進法を比較するときは，それぞれ 10 進法で表してから行うとよい。

$36a + 6b + c = 81c + 9a + b$ より

$27a = -5b + 80c$

ゆえに　$27a = 5(-b + 16c)$　……①

27 と 5 は互いに素であるから，a は 5 の倍数である。

$1 \leqq a \leqq 5$ より　$a = 5$

①より　$27 \cdot 5 = 5(-b + 16c)$

すなわち　$27 + b = 16c$　……②

よって，$27 + b$ は 16 の倍数である。

$0 \leqq b \leqq 5$ より　$27 \leqq 27 + b \leqq 32$

この範囲で 16 の倍数となるのは　$27 + b = 32$

よって　$b = 5$

②より　$c = 2$（$1 \leqq c \leqq 5$ を満たす）

以上より　$\boldsymbol{a = 5,\ b = 5,\ c = 2}$

したがって　$N = 36 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 2 = \mathbf{212}$